Keine Ahnung von Konstruktionen

30 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Eine Übersicht

Datei Nr. 11110

Stand 2. Juli 2023

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

www.mathe-cd.de

Vorwort

Dieser Text soll dir eine Übersicht über wichtige Konstruktionen mit Zirkel und Geodreieck geben. Wir wollen Dreiecke bzw. Linien in Dreiecken konstruieren und anderes ☺.

Konstruktionen beruhen auf einem einfachen Grundprinzip:
Man findet einen gesuchten Punkt stets durch zwei Bedingungen.

Etwa durch Abstandangaben wie $\overline{AB} = 3\text{ cm}$ (Wenn A bekannt ist, dann liegt B auf dem Kreis um A mit Radius 3 cm) oder durch Winkelangaben wie $\beta = 50^\circ$ (Wenn AB bekannt ist, dann liegt C auf dem freien Schenkel von β).

Damit lassen sich dann wichtige Konstruktionen einfach anfertigen.

Es ist immer wieder die Frage, was man mit dem Geodreieck tun darf. Man kann rechte Winkel mit einer Zirkelkonstruktion bilden, oder auch mit dem Geodreieck. Für das Geodreieck benötigt man kaum Hilfe, daher habe ich hier Konstruktionen mit dem Zirkel bevorzugt.

Noch etwas zum Sprachgebrauch. Schüler verwenden gerne die Formulierung:

„g und h schneiden ***sich***“.

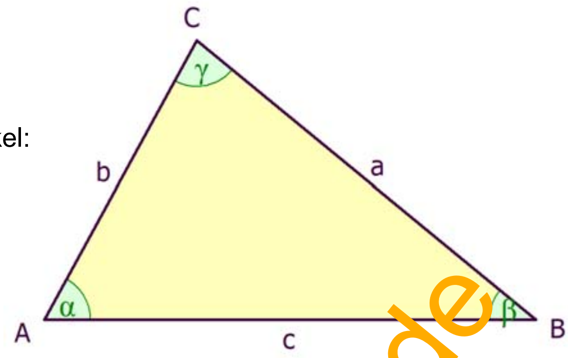
Das ist sachlich falsch, denn es bedeutet im Grunde, dass jede sich selbst schneidet.
Wenn ich „***mich***“ geschnitten habe, dann tut das ***mir*** weh, nicht meinem Begleiter.
Die richtige Formulierung lautet: „g und h schneiden ***einander***“.
Denn g schneidet h, und h schneidet g.

Jetzt wird sicher mancher Leser den Kopf schütteln….
Ja, man hat sich vielleicht an das „sich schneiden“ gewöhnt. Ich leider auch. ☹

Hinweis: In den Texten 11111 und 11112 gibt es weiteres Übungsmaterial zu Dreieckskonstruktionen.

Inhalt dieses Textes

1 Vereinbarungen zu Dreiecken



Zu Beginn müssen wir festlegen, wie wir Dreiecke bezeichnen, also die Eckpunkte, die Seiten und die Winkel: Wenn nicht eine besondere Situation vorliegt sind die gezeigten Bezeichnungen üblicher Standard:

Die Eckpunkte und die gegenüberliegenden Seiten werden mit den gleichen Buchstaben bezeichnet, Punkte mit Großbuchstaben, Seiten mit Kleinbuchstaben und Winkel mit kleinen griechischen Buchstaben.

2 Die Kreislinie ist eine Entfernungslinie

Wenn ein Punkt C von A die Entfernung 6,5 cm haben soll, dann liegt er auf dem Kreis um A mit dem Radius 6,5 cm. Denn die Kreislinie ist der Ort, auf dem in der Zeichenebene alle Punkte liegen, die vom Kreismittelpunkt den vorgegebenen Abstand r haben.
(Im Raum ist dieser Ort eine Kugeloberfläche.)

Also kann man mit einem Zirkel einen Kreis oder Kreisbogen zeichnen, auf dem dann der gesuchte Punkt C liegen wird. Will man die Lage des Punktes C eindeutig bestimmen, braucht man eine zweite Angabe, etwa den Abstand von B, sodass man einen zweiten Kreis zeichnen kann. Dort, wo die beiden Kreise einander schneiden liegt dann C, der dann von A und B die angegebenen Entfernungen a und b hat.

3 Dreieckskonstruktionen

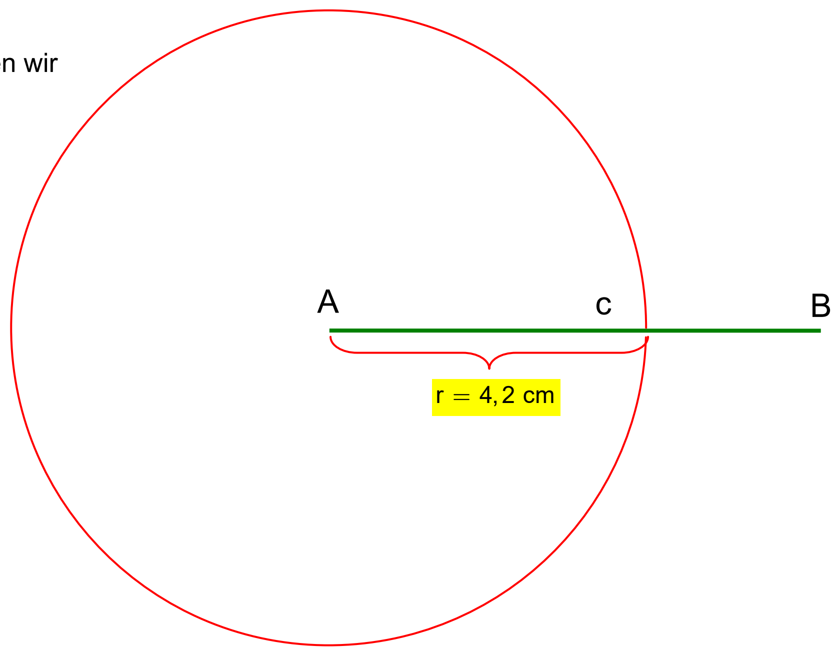
3.1 1. Fall: Gegeben sind drei Seiten $a = 5{,}8$ cm, $b = 4{,}2$ cm und $c = 6{,}5$ cm.

Man beginnt mit einer der drei Seiten:

Etwa mit $c = \overline{AB} = 6{,}5$ cm. Nun wissen wir erstens, dass C von A die Entfernung b = 4,2 cm hat. Also liegt C auf dem Kreis um A mit dem Radius b!

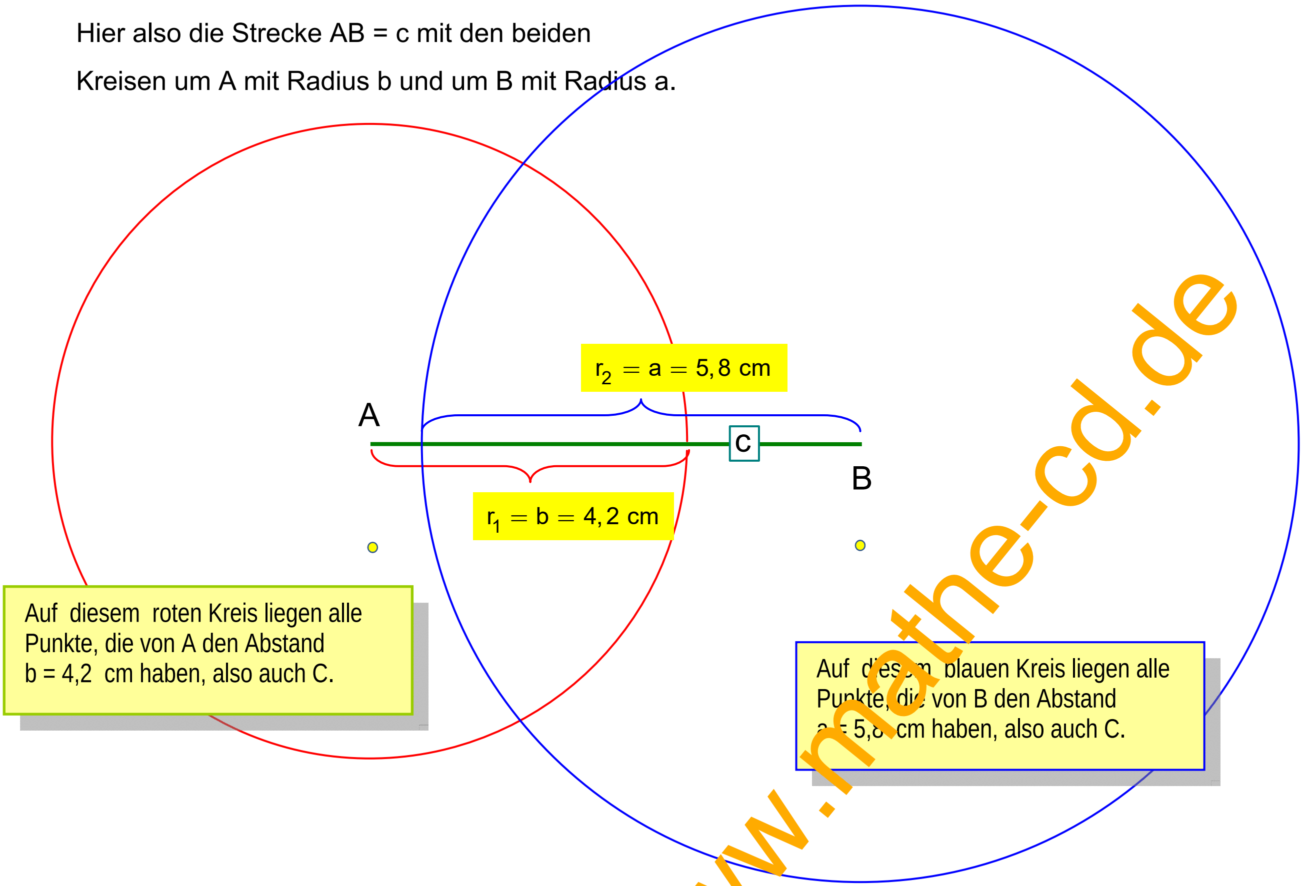
Die zweite notwendige Angabe ist die Strecke $\overline{BC} = a = 5{,}8$ cm.
Also liegt C auch auf dem Kreis um B mit dem Radius r = a = 5,8 cm.

Die Konstruktion sieht daher so aus:



Hier also die Strecke AB = c mit den beiden

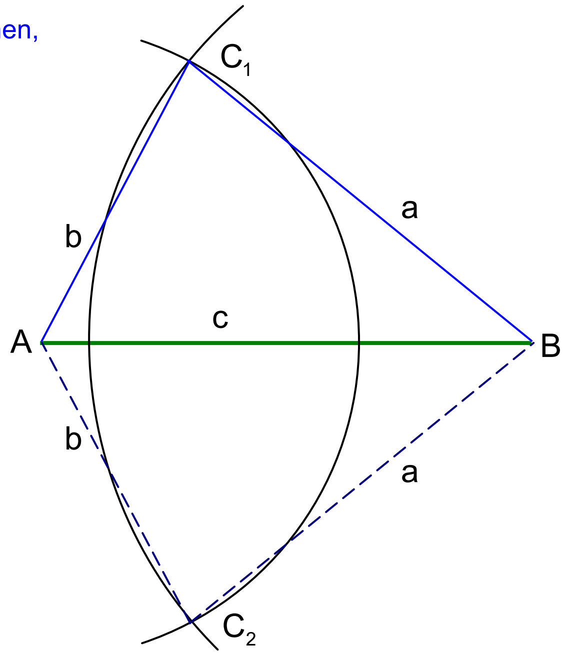
Kreisen um A mit Radius b und um B mit Radius a.



Dies ist die entscheidende Überlegung für die Konstruktion:

Da C auf dem roten <u>und</u> auf dem blauen Kreis liegen soll, dann kann C nur einer den beiden Schnittpunkten der Kreise sein.

Für die Konstruktion genügt es, zwei Kreisbögen zu zeichnen, eben so groß, dass man ihre Schnittpunkte erhält:



Konstruktionstext:

1. Zeichne AB = c.
2- Zeichne Kreise um A mit Radius b und um B mit Radius a.
   Sie schneiden einander in C_1 und C_2.

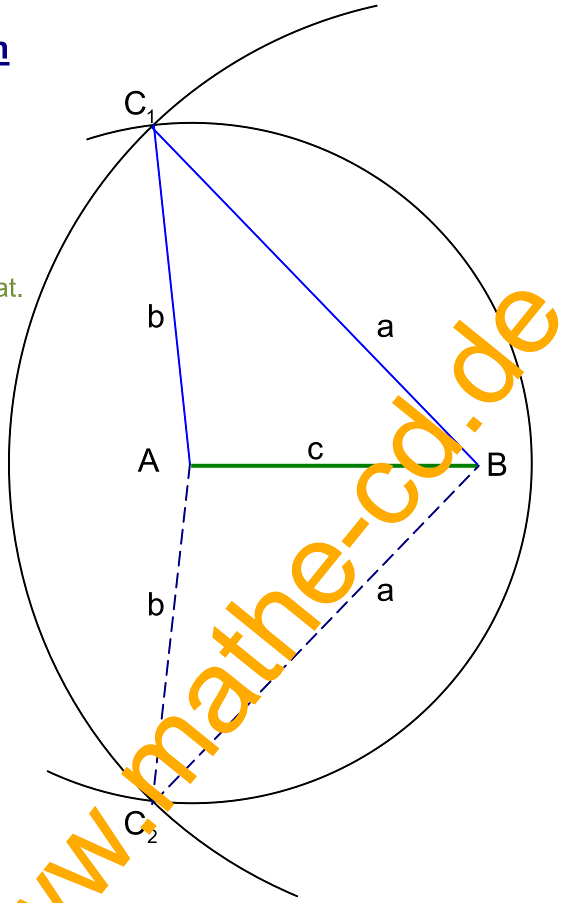
Es gibt zwei Lösungen: ABC_1 und ABC_2.

<u>Hinweis:</u>

Schneidet man das Viereck AC_2BC_1 aus und faltet es entlang c, dann passen das obere und das untere Dreieck genau aufeinander. Man sagt, dass sie **deckungsgleich** oder **kongruent** sind!

Daher ist ABC_2 kein wirklich neues Dreieck und man lässt es oft weg.

Noch so eine Konstruktion aus 3 Seiten



Konstruiere ein Dreieck aus

$c = 3,8$ cm, $a = 6,2$ cm und $b = 4,5$ cm

Diese Figur sieht jetzt etwas anders aus, weil sich bei A ein stumpfer Winkel α ergeben hat. (Ein stumpfer Winkel ist größer als 90°, aber kleiner als 180°.)

Der Konstruktionstext ist derselbe wie in (a).

Man kann ihn auch so formulieren:

Konstruktionstext:

1. Zeichne AB = c.

2- Die Kreise um A mit Radius b und um B mit Radius a schneiden einander in C_1 und C_2.
Es gibt zwei Lösungen: ABC_1 und ABC_2.

HINWEIS:

Auch hier passen die beiden Dreiecke genau aufeinander, sie sind deckungsgleich oder **kongruent**.
Das heißt: **Alle Dreiecke, die in ihren drei Seiten übereinstimmen, passen genau aufeinander,** *wenn man sie ausschneidet und aufeinander legt.*

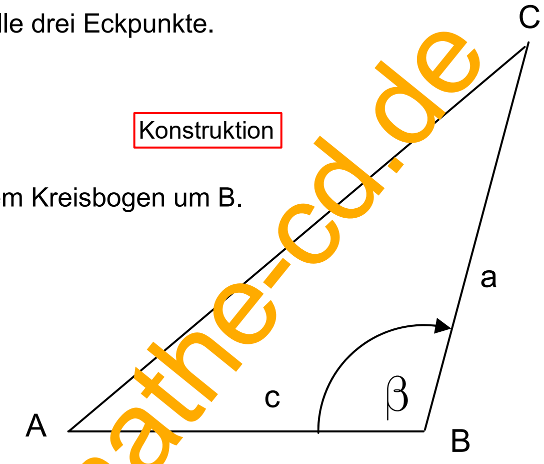
Eine wichtige Aufgabe der Geometrie ist es, zu erkennen, wann bzw. ob zwei Dreiecke kongruent sind. Dazugibt es mehrere Möglichkeiten. Diese bilden die sogenannten **Kongruenzsätze**, die man im Text 11111 nachlesen kann.

3.2 2. Fall: Gegeben sind 2 Seiten und der eingeschlossene Winkel

z. B. $c = 4{,}7$ cm, $a = 5{,}3$ cm und $\beta = 105°$.

Wenn man wie hier zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel kennt, dann kann man mit dem Winkel β beginnen und dann vom Scheitel B des Winkels in beiden Richtungen bis zum Endpunkt der Strecken a und c vorangehen, d.h. man hat dann gleich alle drei Eckpunkte.

Man kann auch mit einer der beiden Strecken beginnen, etwa mit c, dann den Winkel β anlegen und auf seinem freien Schenkel die Strecke a abtragen, eventuell mit einem Kreisbogen um B.

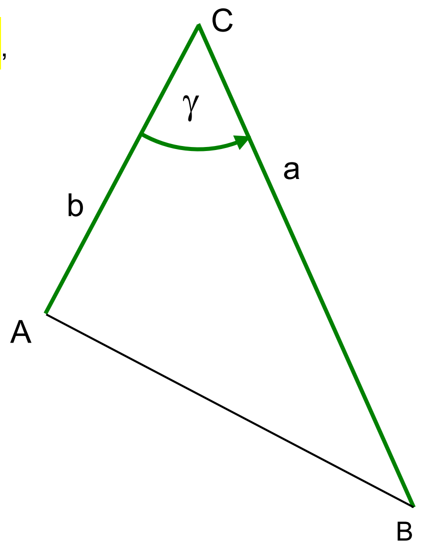


Konstruktionstext:

1. Zeichne AB = c.
2. Lege an c in B Winkel β an.
3. Trage auf seinem freien Schenkel von B aus a ab bis C.

Oder dieses Beispiel

Konstruiere ein Dreieck aus $a = 7$ cm, $b = 4{,}3$ cm und $\gamma = 52^{O}$,



Konstruktionstext:

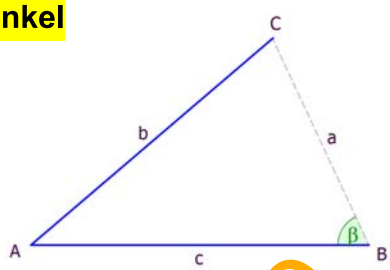
1. Zeichne AC = b.
2. Lege an b in C Winkel γ an.
3. Trage auf dem freien Schenkel von γ von C aus die Strecke a bis B ab, etwa mit einem Kreisbogen um C.

3.3 3. Fall: Gegeben sind 2 Seiten und ein Gegenwinkel

z. B. **$c = 6{,}7$ cm, $b = 6{,}3$ cm und $\beta = 65^\circ$**.

Zuerst sollte man eine Skizze machen, und darin kenntlich machen, welche Größen gegeben sind.

Planfigur:



Man beginnt mit der Strecke $c = \overline{AB} = 6{,}7$ cm. weil der gegebene Winkel β den Scheitel B hat und daher sofort an die Strecke AB angelegt werden kann. *Wer mit b beginnt, kommt nicht weiter.*

Bestimmung von C:

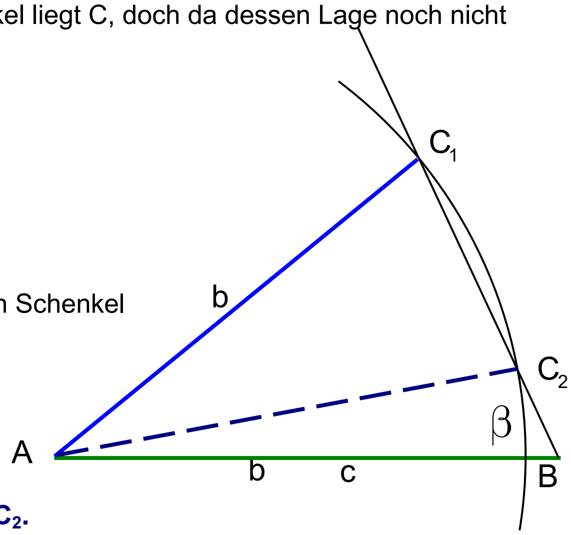
Hier haben wir nur eine Entfernungsangabe: $b = \overline{AC} = 6{,}3$ cm . Also liegt C auf dem Kreis um A mit Radius b. Die zweite Bedingung, die man braucht, um C zu fixieren, ist der gegebene Winkel β . Wenn man ihn zeichnet, verwendet man die Strecke c als ersten Schenkel von β und zeichnet dann mit einem Geodreieck den zweiten Schenkel, also eine Halbgerade, die in B beginnt und in die Richtung läuft, auf der C liegt.

Also: **C liegt auf dem Kreis um A mit Radius b und auf dem Schenkel von β.**

Die Bezeichnung „**freier Schenkel**" bedeutet folgendes: Die beiden Schenkel eines Winkel sind Halbgeraden. Der Schenkel, auf dem die Strecke c liegt, hat aber deren Endpunkt, wodurch diese Halbgerade zur Strecke wird. Auf dem anderen Schenkel liegt C, doch da dessen Lage noch nicht bekannt ist, nenn man ihn einen **freien Schenkel**.

Konstruktionstext:

1. Zeichne AB = c.
2. Lege an c in B β an.
3. Der Kreis um A mit Radius b schneidet den freien Schenkel von β in C_1 und C_2.



Der Kreis um A mit Radius b schneidet den freien Schenkel von β zweimal.

Es gibt zwei verschiedene Dreiecke ABC_1 und ABC_2.

Interessant ist folgende Überlegung: Wenn die Strecke b etwas größer ist, also z. B. 7 cm, dann ist sie größer als c. Der Kreis um A schneidet dann die Strecke AB nicht mehr, d. h. er schneidet den freien Schenkel von β nur einmal. Ist als b > c, dann gibt es für dieses Dreieck nur eine Lösung!

Wenn b beispielsweise die Länge 4 cm haben soll, dann wird der Kreis um A den freien Schenkel von β nicht schneiden: Es gibt also kein Dreieck mit $c = 6{,}7$ cm, $b = 4$ cm und $\beta = 65^\circ$

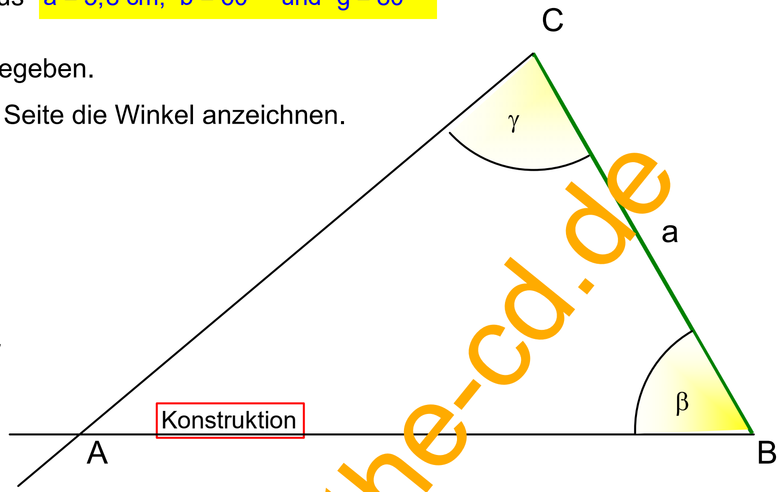
MERKE: Im Falle 2 Seiten und ein Gegenwinkel gibt es nicht immer eine eindeutige Lösung.

3.4 4. Fall: Gegeben sind 2 Winkel und eine Seite

1. Beispiel: Konstruiere ein Dreieck aus $a = 5{,}8$ cm, $b = 60^O$ und $g = 80^O$

Hier ist die **eingeschlossenen Seite** gegeben.
Daher kann man an beiden Enden dieser Seite die Winkel anzeichnen.

1. Zeichne $a = BC$.
2. Lege an a in B den Winkel β an.
3. Lege an a in C den Winkel γ an.
4. Die freien Schenkel von β und γ schneiden einander in A.



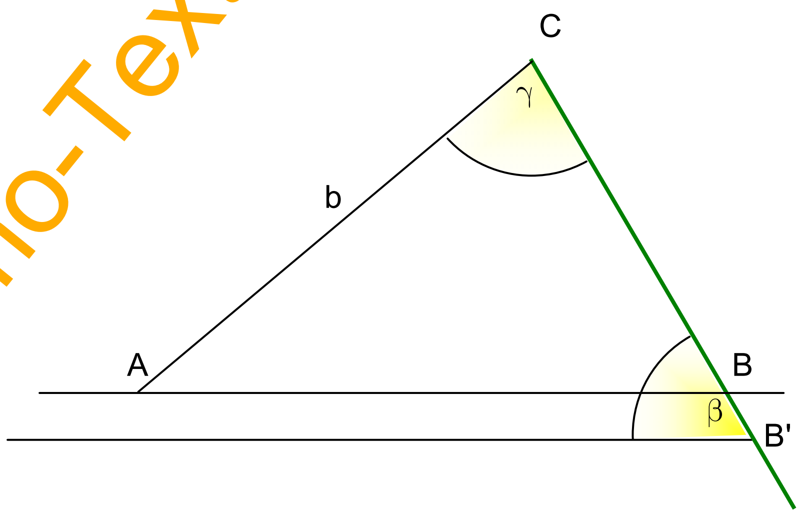
2. Beispiel: Konstruiere ein Dreieck aus $b = 6{,}8$ cm, $\beta = 60^O$ und $\gamma = 80^O$

Hier ist nicht die eingeschlossene Seite gegeben sondern eine **Gegenseite zu einem Winkel**.

1. Beginne mit der Seite $AC = b$.
2. Lege an AC in C den Winkel γ an.

Nun kommt der Trick:

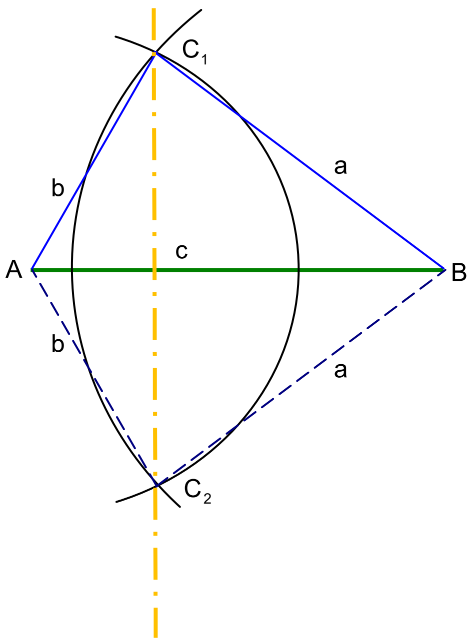
3. Wähle auf dem freien Schenkel von γ einen Punkt B' und lege an CB' in B' den Winkel β an.
4. Zeichne zum freien Schenkel von β eine Parallele. Diese schneidet die Gerade (CB') in B.

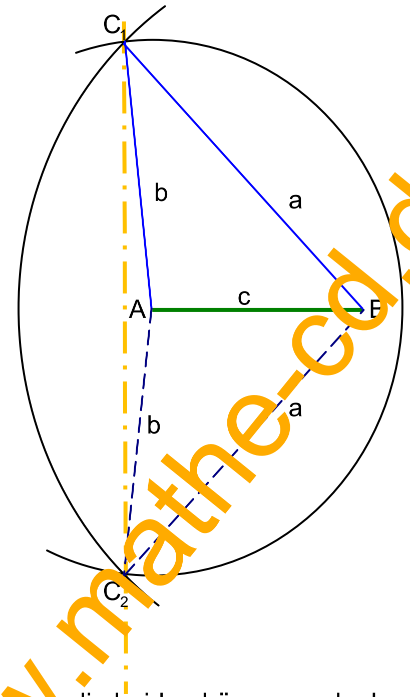


HINWEIS. Kennt man zwei Winkel, kann man den dritten berechnen (die Winkelsumme beträgt 180^O) und dann kann man den 5. Fall wie den 4, Fall zeichnerisch lösen.

4 Konstruktion einer Senkrechten mittels Zweikreisfigur

Wir schauen uns noch einmal die Konstruktionen aus 3 an:





Ich habe in den zugehörenden Abschnitten beschrieben, dass die beiden Lösungen denkungsgleich (= kongruent) sind. Wenn man das Dreieck ABC_1 um die Achse AB umklappt, was man auch als Spiegelung an der Geraden (AB) sehen kann, dann passt es exakt auf das Dreieck ABC_2.

Wenn man über Spiegelungen etwas Bescheid weißt, dann dieses:

Die Verbindungslinie von Punkt C_1 und Bildpunkt C_2 ist orthogonal (senkrecht) zur Achse, an der man spiegelt.

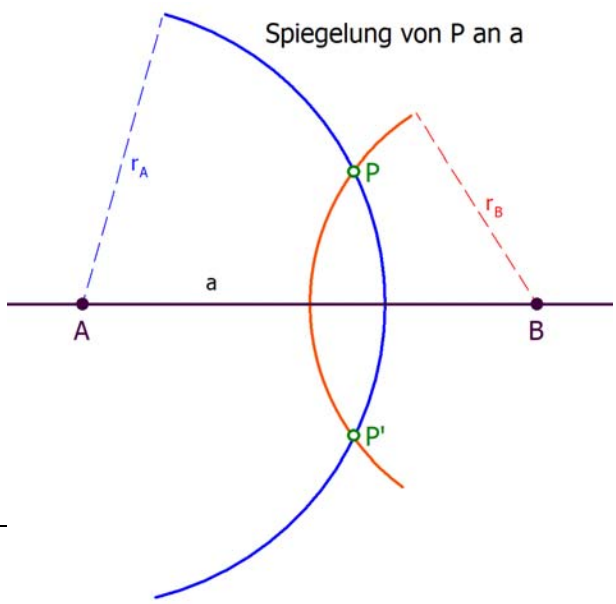
5 Daraus ergibt sich eine einfache Konstruktionsmöglichkeit für eine Spiegelung eines Punktes an einer Achse:

Konstruktion:

Man wählt zwei beliebige Punkte A und B auf der Achse a.

Dann zeichnet man um A und um B je einen Kreis durch den Punkt P, der gespiegelt werden soll.

Ihr zweiter Schnittpunkt ist das gesuchte Spiegelbild.

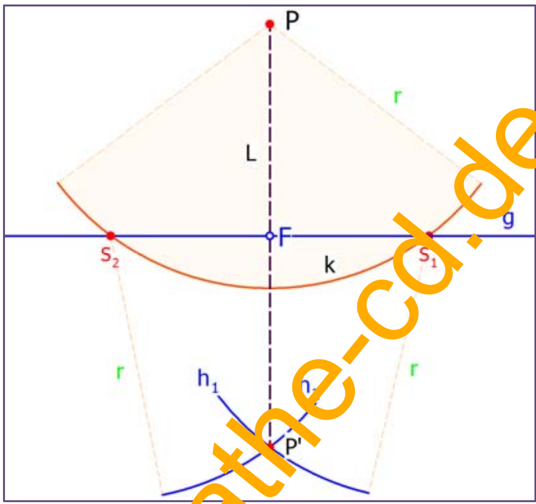


6 Daraus ergibt sich eine Konstruktion für andere Grundaufgaben

Die Drei-Kreis-Konstruktion

Gegeben sind die Gerade g und der Punkt P, der nicht auf g liegt.

Man zeichnet einen Kreisbogen k um P, der g zweimal schneidet, in S_1 und S_2.
Dann zeichnet man um diese Punkte Hilfskreise h_1 und h_2 mit dem gleichen Radius wie k.
Diese schneiden einander in P und in P'.
Die Gerade (PP') ist dann orthogonal zu g.



Folgende Konstruktionsaufgaben kann man mit der Drei-Kreis-Figur lösen:

6.1 **Fälle das Lot von P auf g.**

Der Schnittpunkt der Lotgeraden L mit g ist der Lotfußpunkt.

Zeichne eine Senkrechte von P auf g. L ist die gesuchte Senkrechte.
Diese Konstruktion liefert auch dann eine Senkrechte zu g durch P, wenn P auf g liegt.

6.2 **Konstruiere die Mittelsenkrechte L zu zwei Punkten S_1 und S_2.**

Man zeichnet dann um S_1 und S_2 zwei Hilfskreise mit gleichem Radius so, dass sie einander schneidet. Die Verbindungsgerade der beiden Schnittpunkte P und P' ist die gesuchte Mittelsenkrechte.

Konstruiere den Mittelpunkt der Punkte S_1 und S_2.

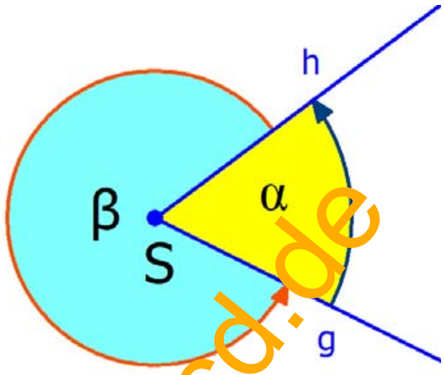
Man zeichnet dann um S_1 und S_2 zwei Hilfskreise mit gleichem Radius so, dass sie einander schneidet. Die Verbindungsgerade der Schnittpunkte P und P' schneidet g im gesuchten Mittelpunkt. *(Der Anfangskreis k um P entfällt hierbei, P ist nicht gegeben.)*

6.3 **Spiegle einen Punkt P an der Geraden g.**

Man zeichnet einen Kreisbogen k um P, der g zweimal schneidet, in S_1 und S_2.
Dann zeichnet man um diese Punkte Hilfskreise h_1 und h_2 mit dem gleichen Radius wie k.
Diese schneiden einander in P und in P'. Das Spiegelbild von P ist P'.

7 Winkel

Es ist nicht einfach, zu beschreiben, was ein Winkel ist. Man kann zumindest aufzählen, dass ein Winkel zwei Schenkel hat. Das sind Halbgeraden, die einen gemeinsamen Anfangspunkt S (Scheitel des Winkels) haben, aber keinen Endpunkt.
Diese beiden Halbgeraden zerteilen die Zeichenebene in zwei sogenannte Winkelfelder. Ich habe sie mit α und β bezeichnet.



Das Winkelfeld α besteht dann aus den Schenkeln g und h zusammen mit den Punkten „dazwischen".
Im Falle des Winkels α habe ich das Winkelfeld teilweise gelb eingefärbt.
Es endet aber nicht am Kreisbogenpfeil, sondern geht weiter ins Unendliche.

Das Winkelfeld β besteht auch aus den Schenkeln g und h zusammen mit den Punkten „dazwischen".
Ich habe dieses Winkelfeld teilweise hellblau eingefärbt.

Man erkennt, dass das Wort „dazwischen" nicht geeignet ist, die Punktmenge zu beschreiben.
Doch da ich Winkel für den Schulunterricht anschaulich beschreiben will, lasse ich das so stehen.
Dabei hilft uns zum Verständnis auch die Farbe.

Die beiden Halbgeraden / Schenkel zerteilen die Zeichenebene in zwei Winkelfelder α und β.
Zu diesen gehören jeweils auch die beiden Schenkel.

Man kann also mengentheoretisch sagen: $\alpha \cap \beta = h \cup g$, in Worten:
Die beiden Schenkel g und h sind die Schnittmenge der beiden Winkel(felder), denn sie gehören zu beiden Winkeln.

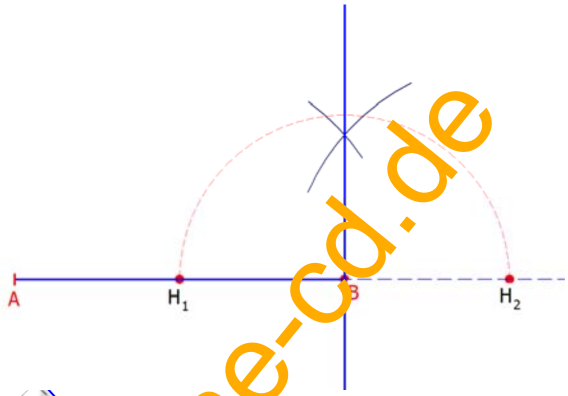
Anschaulich kann man dann einen Winkel als die Gesamtheit der Punkte der Halbgeraden und des von ihnen begrenzten Winkelfeldes bezeichnen. Dabei sollte man aber im Hinterkopf behalten, dass dazu immer zwei Winkel passen – je nachdem, welches Winkelfeld man meint.

Oftmals gibt man den Winkel noch eine **Orientierung**. Das deutet der Kreisbogenpfeil an.
Man bezeichnet dann Winkel, die gegen den Uhrzeigersinn orientiert sind, als positiv, im Uhrzeigersinn ist dann das Winkelmaß negativ.
Winkelmessung wird hier nicht weiter untersucht.

7.1 Konstruktion eines rechten Winkels

Gegeben sei eine Strecke AB, Man soll an AB in B einen rechten Winkel anlegen.

Konstruktion mit Zirkel und Lineal:

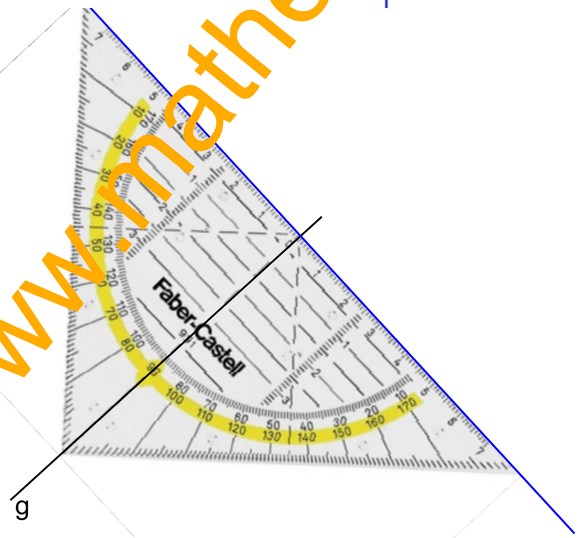


Zeichne die Strecke AB. und verlängere sie.
Zeichne um B einen Halbkreis, der die Gerade (AB) in zwei Punkten Hilfspunkten H_1 und H_2 schneidet.

Zeichne dann um H_1 und H_2 je einen Kreisbogen mit dem gleichen Radius. Die Gerade durch einen Schnittpunkt der Kreisbögen und B bildet mit AB einen rechten Winkel.

Konstruktion mit einem Geodreieck:

Wenn man mit einem Geodreieck einen rechten Winkel anlegen (bzw. eine Senkrechte zeichnen) soll, muss man die Mittellinie auf g legen und kann dann entlang des Lineals die Senkrechte zeichnen.



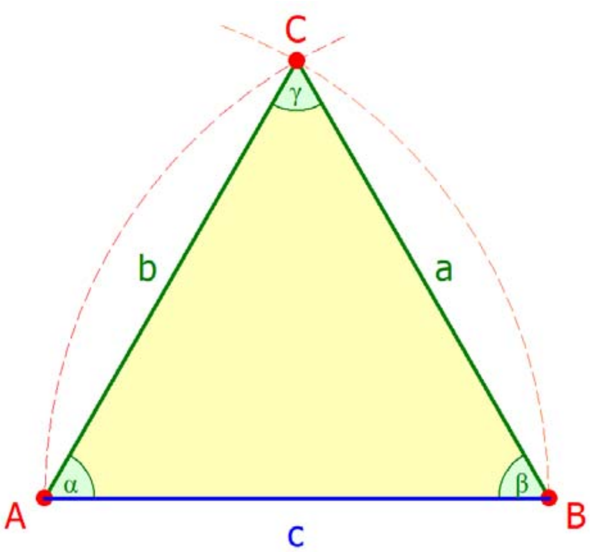
7.2 Konstruktion eines 60-Grad-Winkels mit Zirkel und Lineal.

Diese Konstruktion beruht darauf, dass die Winkel eines gleichseitigen Dreiecks die Größe 60° haben.
Also zeichnet man ein gleichseitiges Dreieck mit zwei Kreisbögen mit demselben Radius:

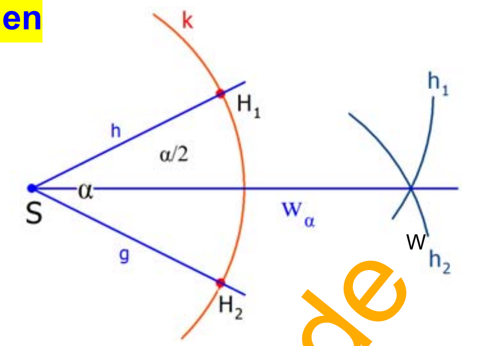
Konstruktion:

Zeichne die Strecke AB = c.
Die Kreisbögen um A und B mit Radius c schneiden einander zweimal in C (und C‘, den ich weggelassen habe).

Da das Dreieck ABC gleichseitig ist, haben alle drei Winkel 60°.



8.1 **Konstruktion einer Winkelhalbierenden**



Im Grunde ist es dieselbe Konstruktion, die wir auch für eine Mittelsenkrechte (6.2) verwenden.

Nur muss man zuerst zwei Punkte H_1 und H_2 erzeugen, zu denen wir dann eine Mittelsenkrechte konstruieren.

Konstruktion (4)

Man beginnt mit dem Winkel α, der halbiert werden soll.
Dann zeichnet man um seinen Scheitel S einen Kreisbogen,
der die beiden Schenkel von α in H_1 und H_2 schneidet.

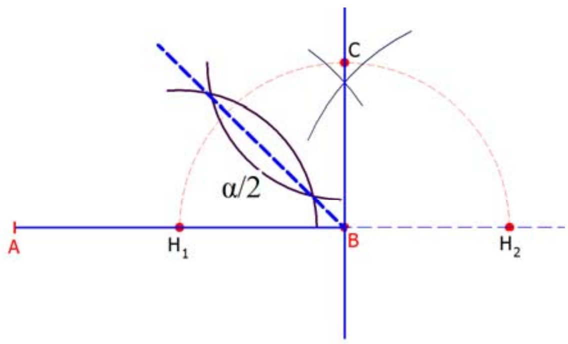
Dann zeichnet man um diese Punkte Hilfskreise h_1 und h_2 mit gleichem Radius.
(Dieser muss nicht derselbe Radius sein, den wir bei k verwendet haben!)
Diese Kreise schneiden einander zweimal. Ein Schnittpunkt genügt: W.
Die Gerade (Halbgerade, Strecke) SW ist die gesuchte Winkelhalbierende.

8.2 **Halbierung eines Winkels**

Hier führt man dieselbe Konstruktion wie in 6.2 bzw. 8.1 durch, d. h. man konstruiert die Winkelhalbierende. Dann hat man auch schon den halben Winkel erzeugt.

8.3 **Konstruktion eines 45-Grad-Winkels mit Zirkel und Lineal.**

Man halbiert den wie oben konstruierten 90°-Winkel:



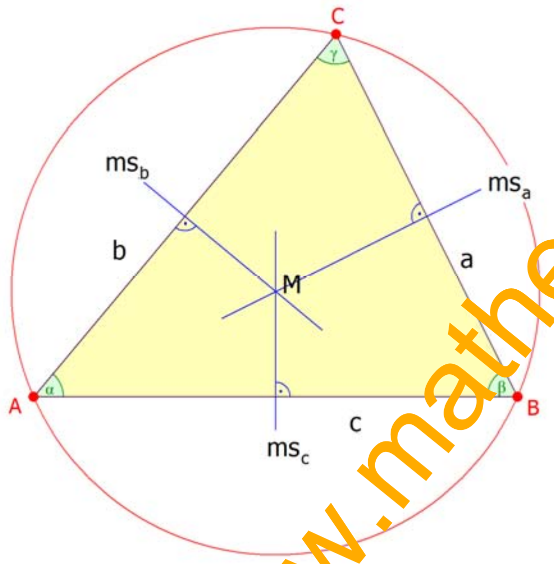
Bei der Konstruktion des 90°-Winkels zeichnet man einen Halbkreis um B, der AB in H_1 schneidet und die Senkrechte in C.

Nun benötigt man zwei einander schneidende Kreisbögen um H_1 und C.
Die Verbindungslinie ist die Winkelhalbierende des rechten Winkels, und diese zerlegt den rechten Winkel in zwei 45°-Winkel.

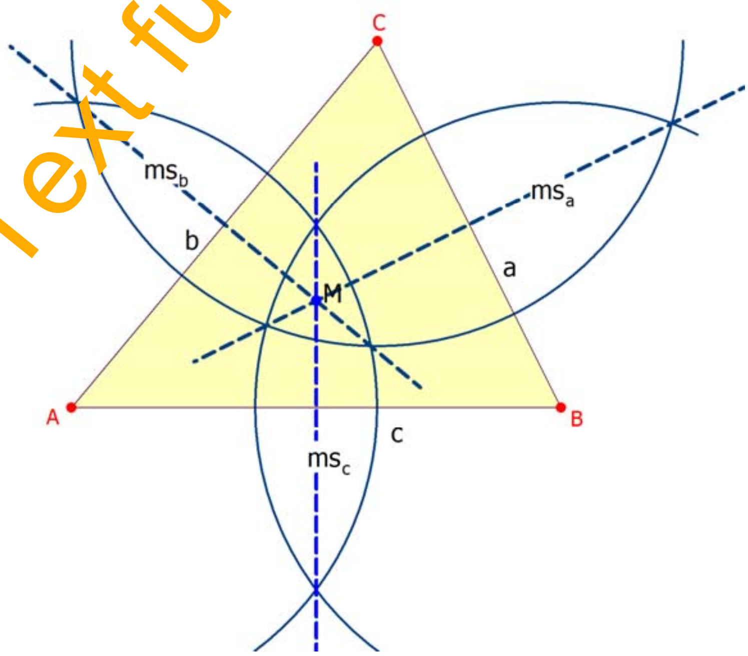
9 Teilstrecken im Dreieck

9.1 Die drei **Mittelsenkrechten** eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt M.

Dieser ist der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks.

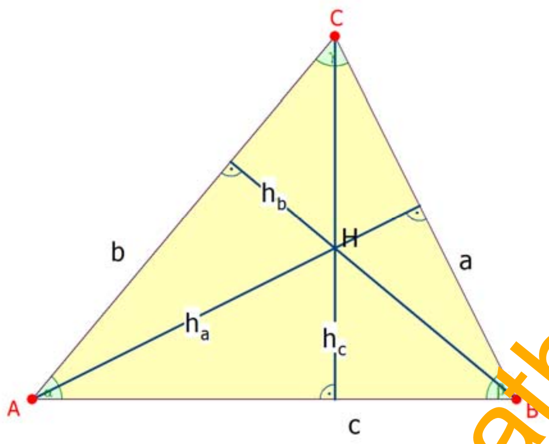


Zur Konstruktion der 3 Mittelsenkrechten benötigt man nur 3 hinreichend große Kreisbögen (fast Halbkreise).



Die Mittelsenkrechten im Dreieck sind Geraden.

9.2 Die drei **Höhen im Dreieck** sind im Gegensatz zu den Mittelsenkrechten Strecken, die von einem Eckpunkt zur Gegenseite verlaufen und diese im Lotfußpunkt schneiden. Die dreie Höhen eines Dreiecks gehen durch einen gemeinsamen Punkt H.



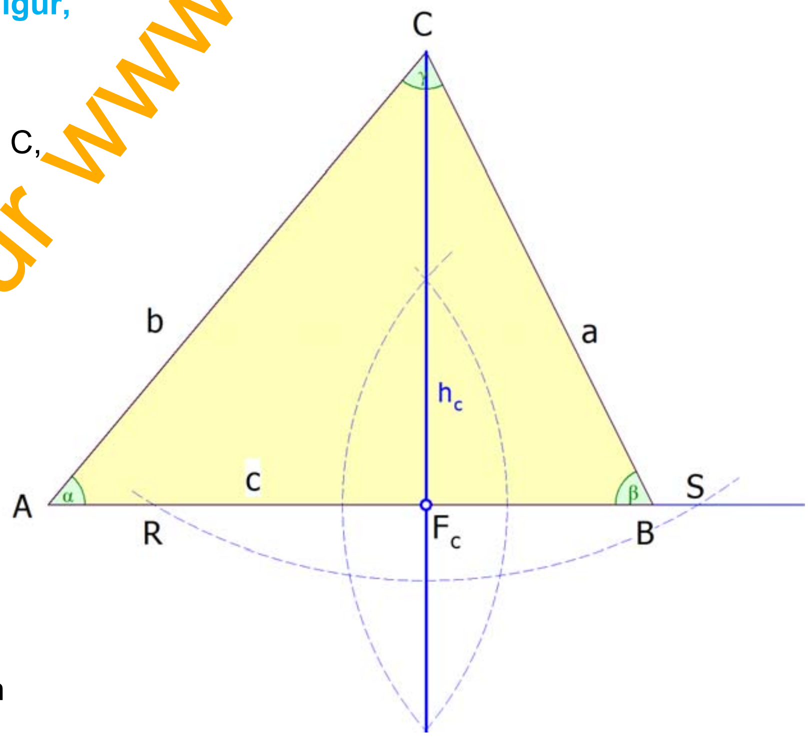
Eine Höhe konstruiert man entweder mit einem Geodreieck oder mit deiner Drei-Kreis-Figur:

Verwendet man eine Drei-Kreis-Figur, geht man so vor:

1. Zeichne einen Kreisbogen um C, der die Gerade (AB) in zwei Punkten schneidet: R und S.

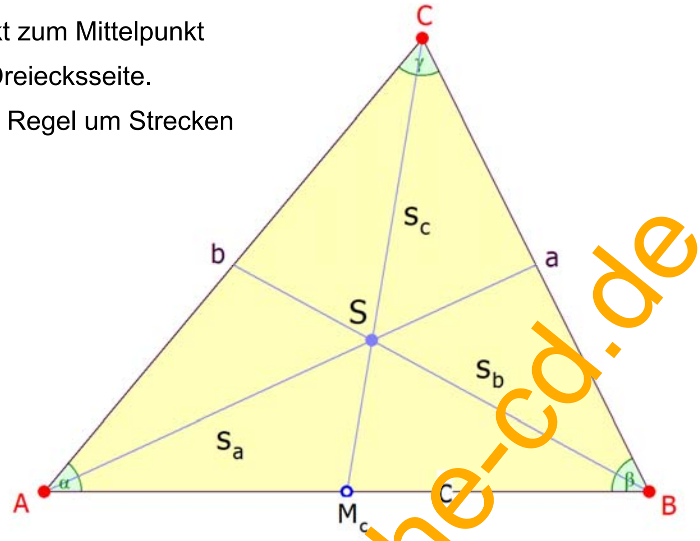
2. Zeichne um R und S zwei Kreisbögen mit gleichem Radius, die einander schneiden.

3. Verbindet man diese Schnittpunkte, erhält man die Höhe h_c (die natürlich auch durch C geht.)



9.3 Die drei **Seitenhalbierenden im Dreieck**

gehen von einem Eckpunkt zum Mittelpunkt
der gegenüberliegenden Dreiecksseite.
Es handelt sich also in der Regel um Strecken



Merke: Die drei Seitenhalbierenden schneiden einander in einem Punkt S, der Schwerpunkt heißt.

Er teilt jede Seitenhalbierende (als Strecke) im Verhältnis 2 : 1.

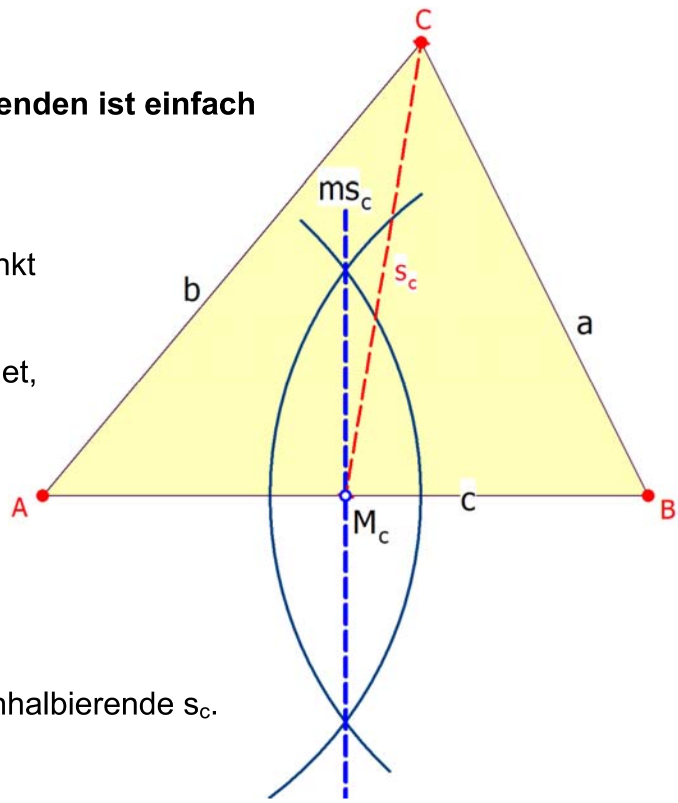
Hier habe ich Seitenhalbierende als Strecken behandelt.
Man kann auch die durch S und die Eckpunkte gehenden Geraden Seitenhalbierende nennen. Man achte auf den Kontext.

Die Konstruktion einer Seitenhalbierenden ist einfach

Man muss lediglich den Mittelpunkt der betreffenden Seite halbieren.
Beispielsweise findet man den Mittelpunkt von c, indem man um A und B zwei Kreisbögen mit gleichem Radius zeichnet, die sich zweimal schneiden.

Die Verbindungslinie dieser Schnittpunkte schneiden die Strecke c in ihrem Mittelpunkt M_c.

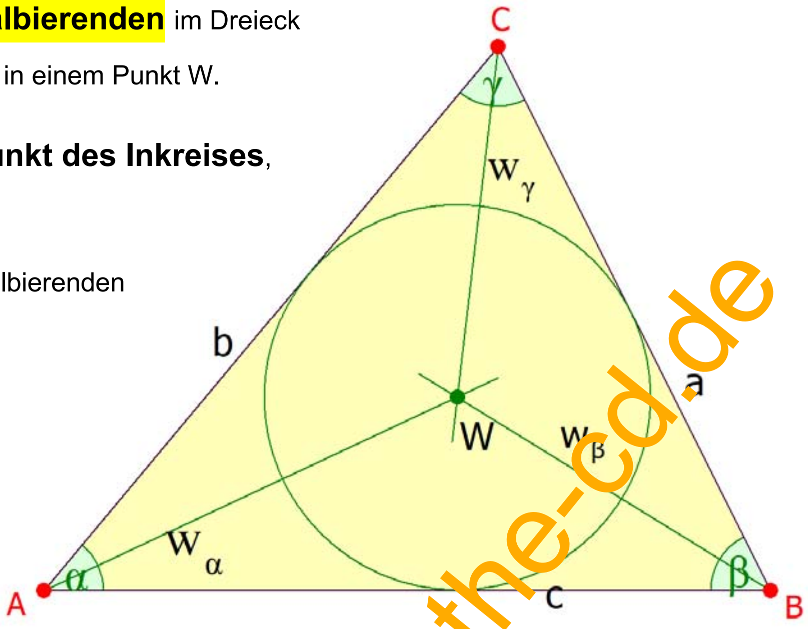
Die Strecke CM_c ist die gesuchte Seitenhalbierende s_c.



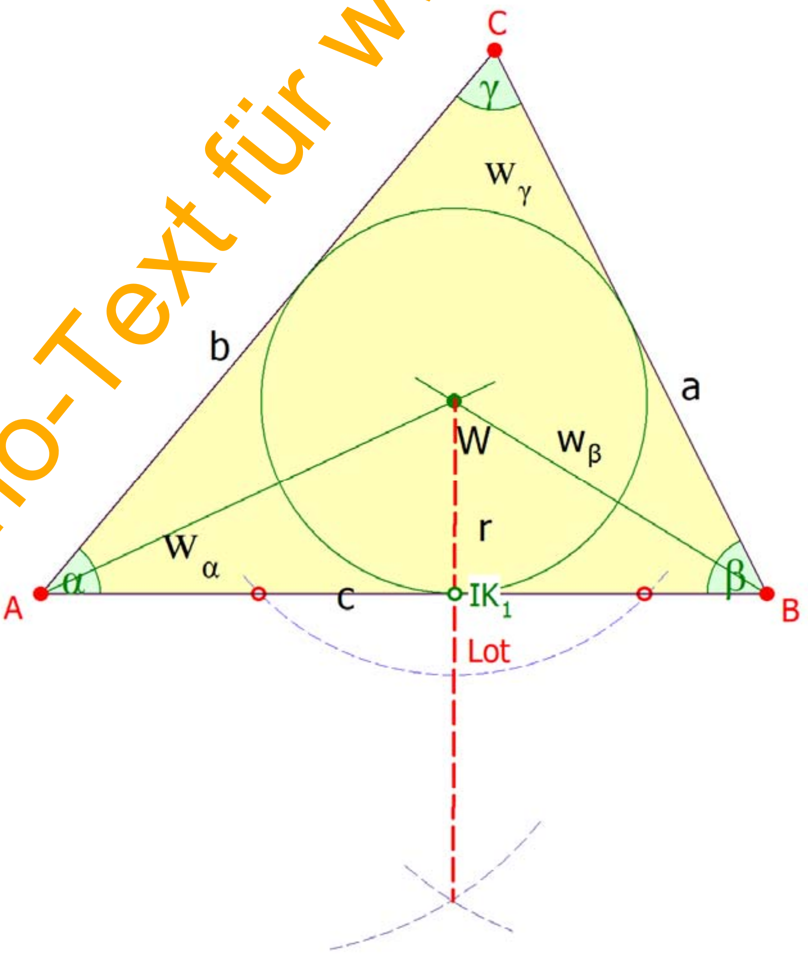
9.4 Die drei **Winkelhalbierenden** im Dreieck schneiden einander in einem Punkt W.

Dieser ist zugleich der **Mittelpunkt des Inkreises**, der alle drei Seiten berührt.

Dier Konstruktion einer Winkelhalbierenden wurde im Abschnitt 8.1 gezeigt.



Zum **Zeichnen des Inkreises** benötigt man zuerst den Schnittpunkt W zweier Winkelhalbierenden. Dann fällt man von W mit der Drei-Kreis-Konstruktion (oder dem Geodreieck) das Lot auf eine der Dreieckseiten. Dieses schneidet die Dreieckseite in einem der drei **Berührpunkte**. (IK_1) Der Inkreis hat dann den Mittelpunkt W und den Radius $r = \overline{W - IK_1}$.



$\boxed{10}$ Rechtwinklige Dreiecke konstruieren

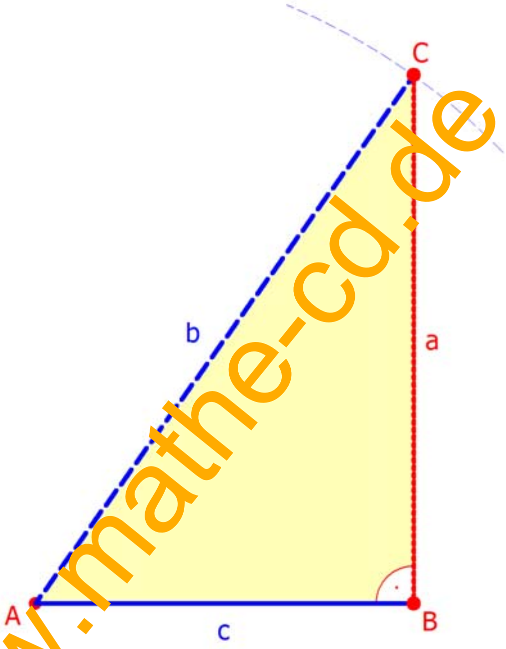
(1) Gesucht ist ein Dreieck mit c = 5 cm, $\beta = 90^{\circ}$ und entweder b = 7 cm oder a = 4,5 cm.

Konstruktion:

Man beginnt mit c = AB und errichtet dann den rechten Winkel β in B entweder mit einem Geodreieck oder mit einer Zirkelkonstruktion wie in $\boxed{10}$ (1).

Ist dann noch b gegeben, folgt ein Kreisbogen um A, der den freien Schenkel von β in C schneidet.

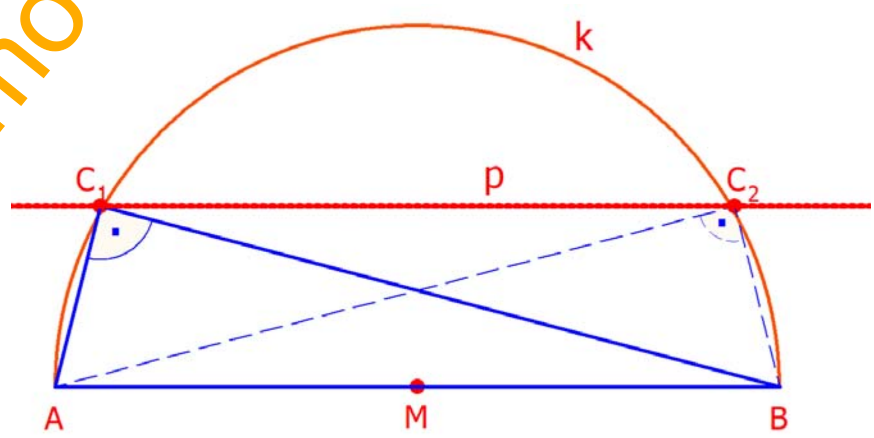
Ist aber a gegeben, dann erhält man C als Schnitt eines Kreisbogens um B mit dem freien Schenkel.



(2) Gesucht ist ein Dreieck mit c = 8 cm, $\gamma = 90^{\circ}$ und der Höhe h_c = 3 cm.

Konstruktion:

Man beginnt mit c = AB und zeichnet dann über AB einen Halbkreis.
Dann zeichnet man eine Parallele p zu AB im Abstand h = cm.
Diese schneidet den Halbkreis in C_1 und C_2.
Es gibt also zwei Lösungen: ABC_1 und ABC_2.
Die Dreiecke haben bei C einen rechten Winkel nach dem **Satz des Thales**.

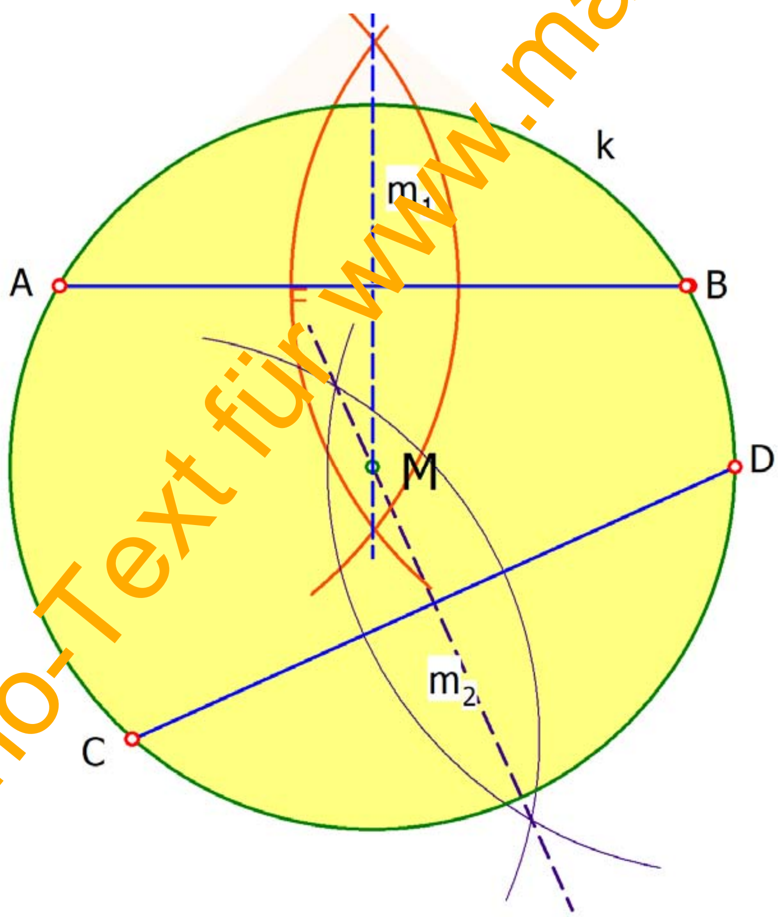


11 Kreismittelpunkt konstruieren

Konstruktion;

Man zeichnet in den Kreis zwei Sehnen AB und CD.
Zu jeder konstruiert man mit je einem paar Kreisbögen mit gleichem Radius die Mittelsenkrechte.
Sie schneiden einander im Kreismittelpunkt M.

Begründung: Alle Punkte einer Mittelsenkrechten haben von den Streckenendpunkten die gleiche Entfernung.
Also hat jeder Punkt auf m_1 von A und B die gleiche Entfernung.
Und jeder Punkt auf m_2 hat von C und D die gleiche Entfernung.
Der Schnittpunkt M dieser Mittelsenkrechten hat daher von A, B, C und D die gleiche Entfernung. Also ist er der Kreismittelpunkt.

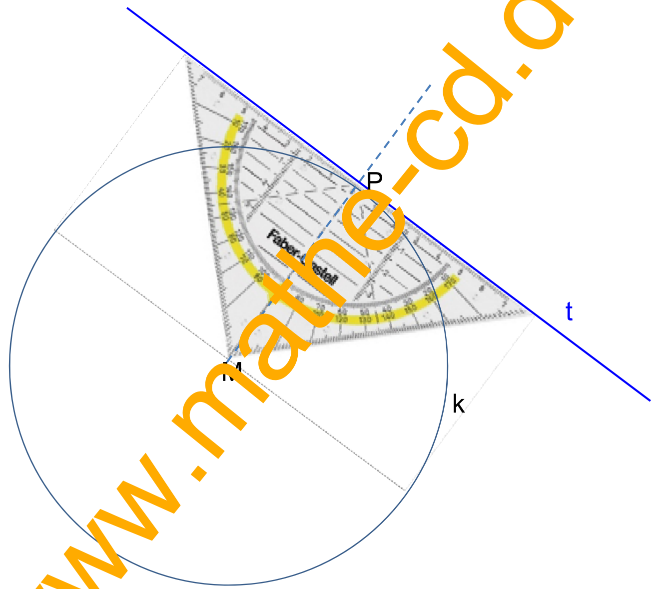


12 Kreistangenten konstruieren

12.1 Gegeben ist ein Kreis k und ein Punkt P auf der Kreislinie.
Konstruiere die Tangente in P an k.

Die Kreistangente in P steht senkrecht auf dem Berührradius MP.

Man beginnt mit der Kreislinie k und dem gegebenen Berührpunkt P auf k. Dann verbindet man den Kreismittelpunkt mit P, das ist dann der Berührradius. Dann legt man das **Geodreieck** entsprechend über den Berührradius und zeichnet die Tangente.



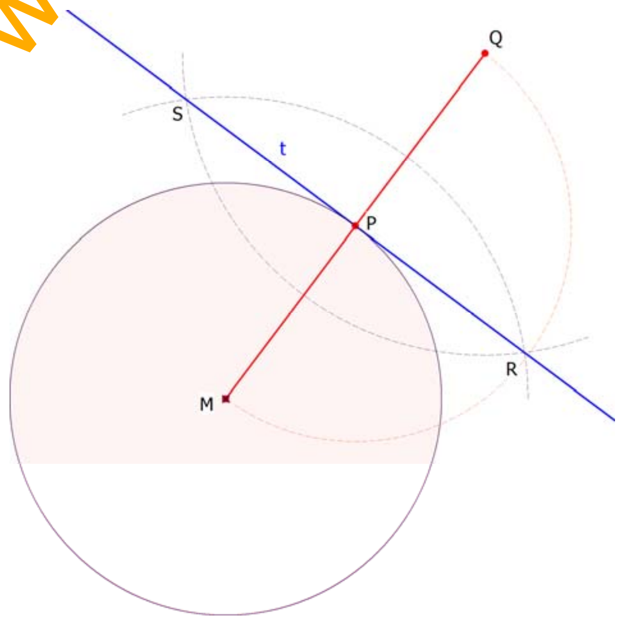
Man kann die Tangente auch als Senkrechte zum Berührradius mit einer Drei-Kreis-Figur konstruieren:

Der erste Kreisbogen ist ein Halbkreis um P durch M. Er schneidet die Halbgerade (MP) in Q. (P ist nun der Mittelpunkt von MQ.)

Die Tangente ist die Mittelsenkrechte zu MQ:

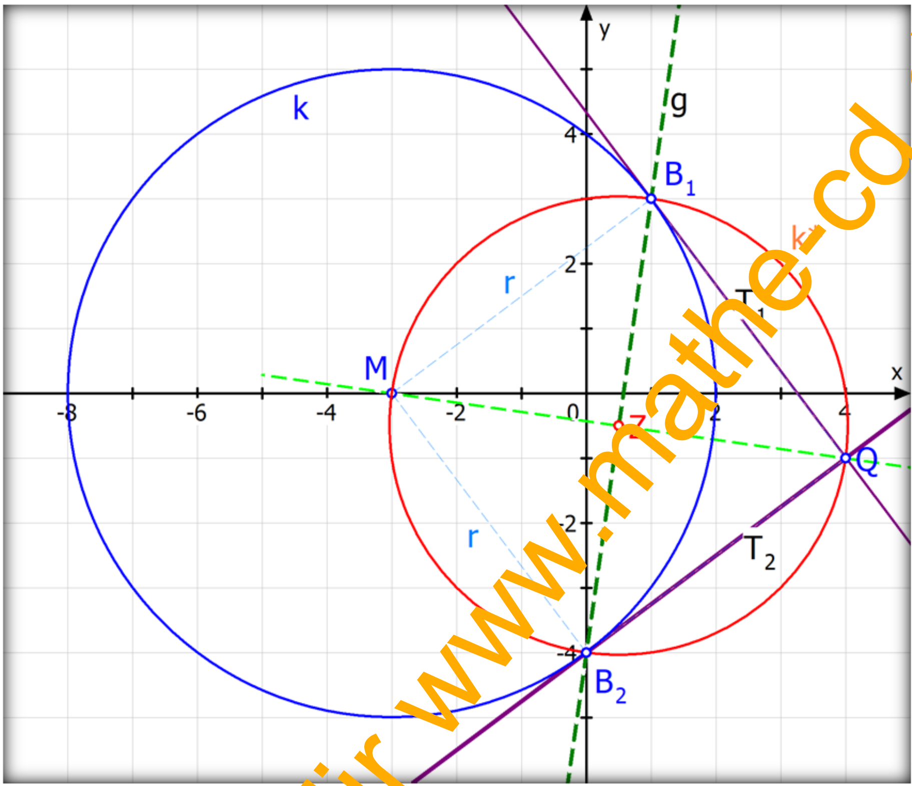
Diese konstruiert man mit zwei Kreisbögen um M und Q mit gleichem Radius. Sie schneiden einander in R und S.

(RS) ist die gesuchte Tangente in P an k.



12.2 Gegeben ist ein Kreis k und eine Punkt Q außerhalb des Kreises.
Konstruiere die Tangenten durch Q an k.

Die folgende Abbildung stammt aus dem Text 22115 (Keine Ahnung von Kreistangenten), in dem auch gezeigt wird, wie man die Gleichung der Tangente berechnen kann.



Erklärung dazu:

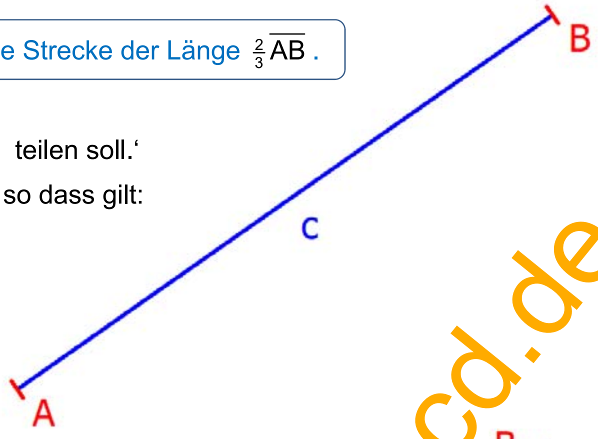
Die Tangente $T_1 = (B_1Q)$ steht (wie jede Tangente) senkrecht auf dem Berührradius $r = MB_1$. Zeichnet man den Kreis k* durch M und Q, so dass MQ ein Kreisdurchmesser ist, dann erkennt man den rechten Winkel bei B_1, der nach dem **Satz von Thales** im Halbkreis 90° hat.

Und damit wird die Konstruktion klar:

Um den Mittelpunkt Z der Strecke MQ zeichnet man einen Kreis k* (der Thaleskreis) durch M und Q. Dieser schneidet den gegebenen Kreis k in den beiden Berührpunkten B_1 und B_2. Die gesuchten Tangenten sind T_1 durch Q und B_1 sowie T_2 durch Q und B_2.

13.1 Strecken teilen - Strahlensatzfigur

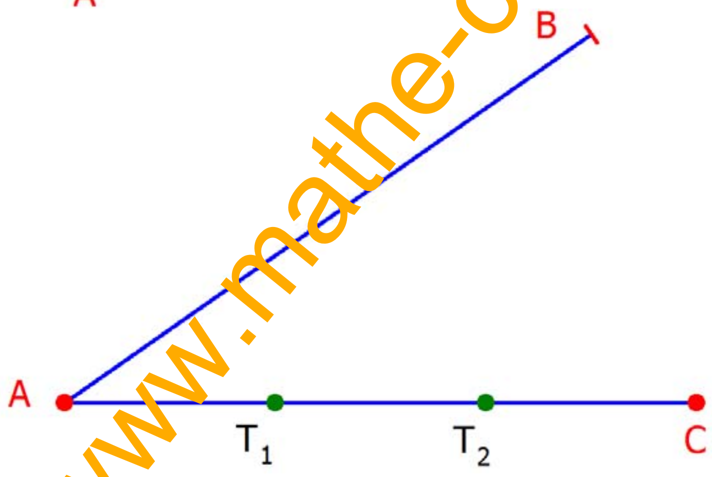
Gegeben ist eine Strecke AB. Konstruiere eine Strecke der Länge $\frac{2}{3}\overline{AB}$.



Dies ist die Strecke, die man im Verhältnis 1:2 teilen soll.'
Gesucht sind also zwei Teilpunkte S_1 und S_2, so dass gilt:

$\overline{AS_1} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ und $\overline{AS_2} = \overline{S_1B} = \frac{2}{3}\overline{AB}$

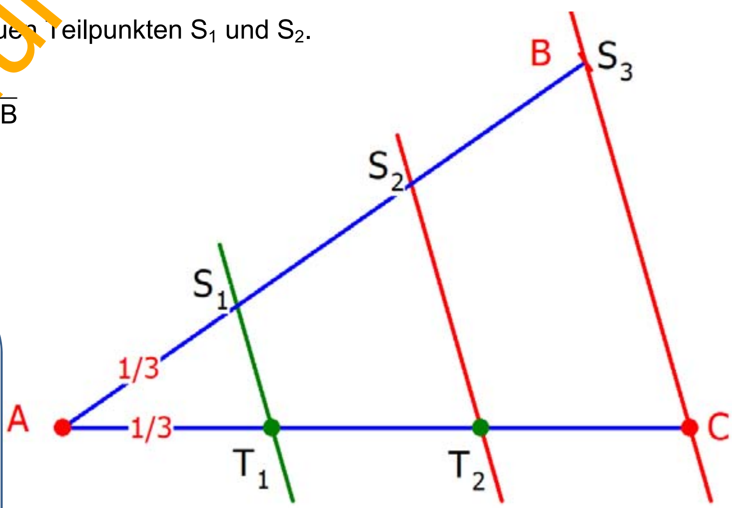
Dann zeichnet man eine neue Strecke AC, die aus 3 gleichlangen Teilen besteht: Beispielsweise habe ich $\overline{AT_1} = \overline{T_1T_2} = \overline{T_2B} = 2\text{ cm}$ verwendet.



Dann verbindet man die Endpunkte B und C der beiden Strecken und zeichnet dazu Parallelen durch T_1 und T_2 ein.
Diese scheiden die Strecke AB in den neuen Teilpunkten S_1 und S_2.

Ergebnis: $\overline{AS_1} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ und $\overline{AS_2} = \frac{2}{3}\overline{AB}$

oder auch $\overline{S_1B} = \frac{2}{3}\overline{AB}$



Begründung:

Da die von A ausgehenden „Strahlen" von Parallelen geschnitten werden, stehen die Teilstrecken auf den beiden Strahlen zueinander im gleichen Verhältnis.

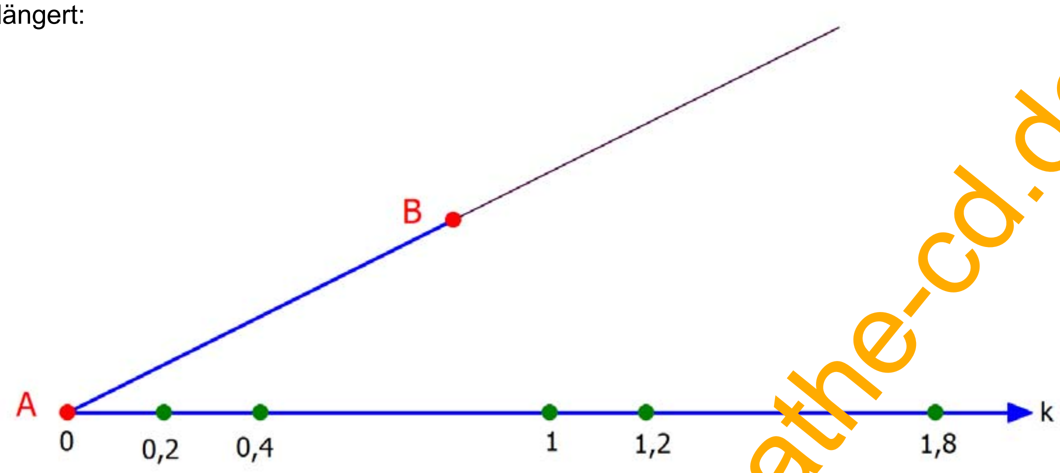
Weil also T_1 die Strecke AC im Verhältnis 1:2 teilt, gilt das analog für S_1 und AB.

(Das ist eine Aussage des Strahlensatzes.)

13.2 Strecken verlängern - Strahlensatzfigur

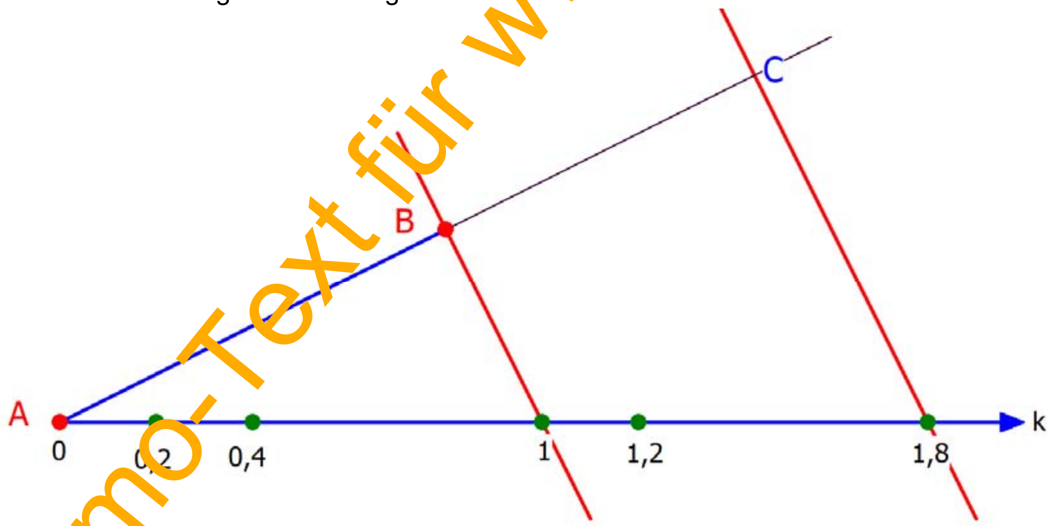
Gegeben ist eine Strecke AB. Konstruiere eine Strecke der Länge $1{,}8 \cdot \overline{AB}$.

Dies ist die Strecke, die man verlängern soll. Ich habe sie bereits über B hinaus zu einer Halbgeraden verlängert:



Ich habe dann einen „Strahl" von A aus gezeichnet und auf ihm Teilpunkte bis k = 1,8 angebracht.

Da AB die „ganze" Strecke ist, verbinde ich sie mit der Marke k = 1 auf dem k-Strahl.
Dann zeichne ich eine Parallele dazu durch die Marke k = 1,8.
Diese schneidet die Halbgerade AB im gesuchten Punkt C.

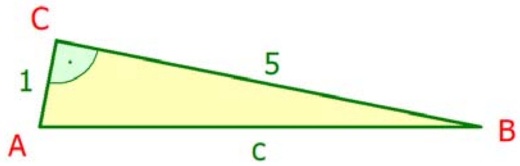


Begründung:

Weil die von A ausgehenden Strahlen (Halbgeraden) von zwei Parallelen geschnitten werden, gilt der 1. Strahlensatz. Dieser besagt, dass auf beiden Strahlen dieselben Verhältnisse gelten.
Weil also auf dem k-Stahl von A aus die Strecke 1,8 Einheiten dargestellt ist, gilt auf der Halbgeraden AB analog: $\overline{AC} = 1{,}8 \cdot \overline{AB}$. ($\overline{AB}$ ist dort die Einheit).

14.1 Eine Strecke der Länge $\sqrt{r}$ zeichnen – mit Pythagoras

a) Zeichne eine Strecke der Länge $\sqrt{26}$ cm.



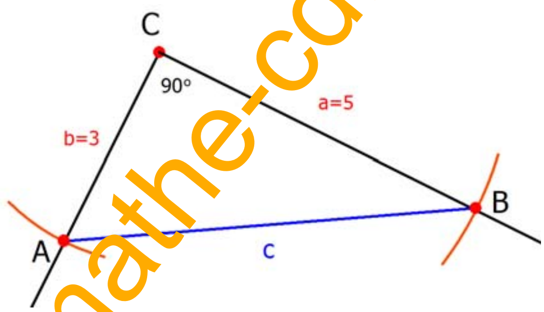
Hier hilft der Satz des Pythagoras.

Er lautet in dieser Form: $c^2 = a^2 + b^2$.

Wir wollen, dass $c = \sqrt{26}$ cm ist, also setzen wir a = 5 cm und b = 1 cm.

Dann gilt (ohne Einheiten): $c^2 = 5^2 + 1^2 = 25 + 1 = 26 \Rightarrow c = \sqrt{26}$

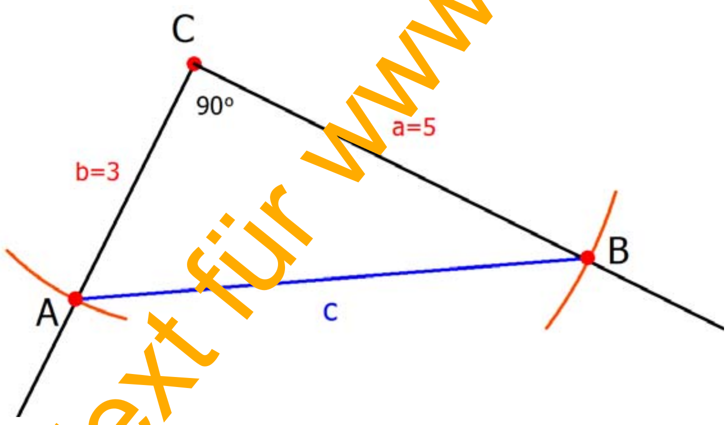
b) Zeichne eine Strecke der Länge $\sqrt{34}$ cm.



Man muss wie in a) zwei geeignete Katheten für das rechtwinklige Dreieck suchen.

Es gibt: $c^2 = 25 + 9 = 34 \Rightarrow c = \sqrt{34}$

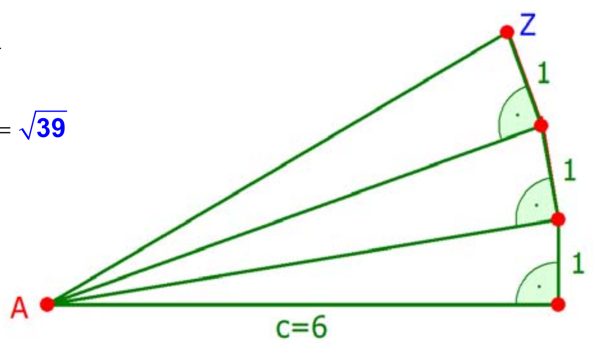
Also zeichnet man einen rechten Winkel und trägt auf den Schenkeln die Längen 5 cm und 3 cm ab:



c) Zeichne eine Strecke der Länge $\sqrt{39}$ cm.

Hier wendet man das Verfahren aus Teilaufgabe a) dreimal an:

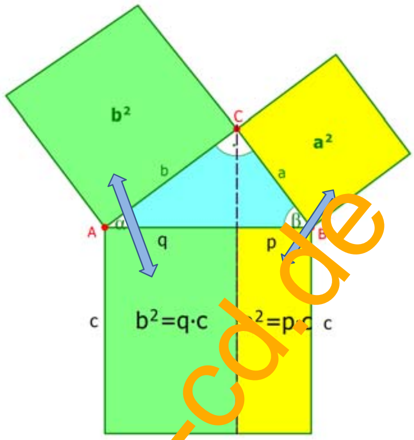
1. Dreieck: $c_1 = 36$, $b_1 = \sqrt{36 + 1} = \sqrt{37}$
2. Dreieck: $c_2 = \sqrt{37}$ $b_2 = \sqrt{37 + 1} = \sqrt{38}$
3. Dreieck: $c_3 = \sqrt{38}$ $b_3 = \overline{AZ} = \sqrt{38 + 1} = \sqrt{39}$



14.2 Eine Strecke der Länge $\sqrt{r}$ zeichnen – mit dem Kathetensatz

Der Kathetensatz sagt uns, dass bei diesem Dreieck gilt:

$a^2 = p \cdot c$ und $b^2 = q \cdot c$



Mit anderen Worten:

Das Rechteck aus der Hypotenuse c und dem Hypotenusenabschnitt p (bzw. q) ist flächengleich dem Quadrat über der Kathete a (b).

Ganz einfaches Beispiel:

Wenn in einem rechtwinkligen Dreiecke gilt:

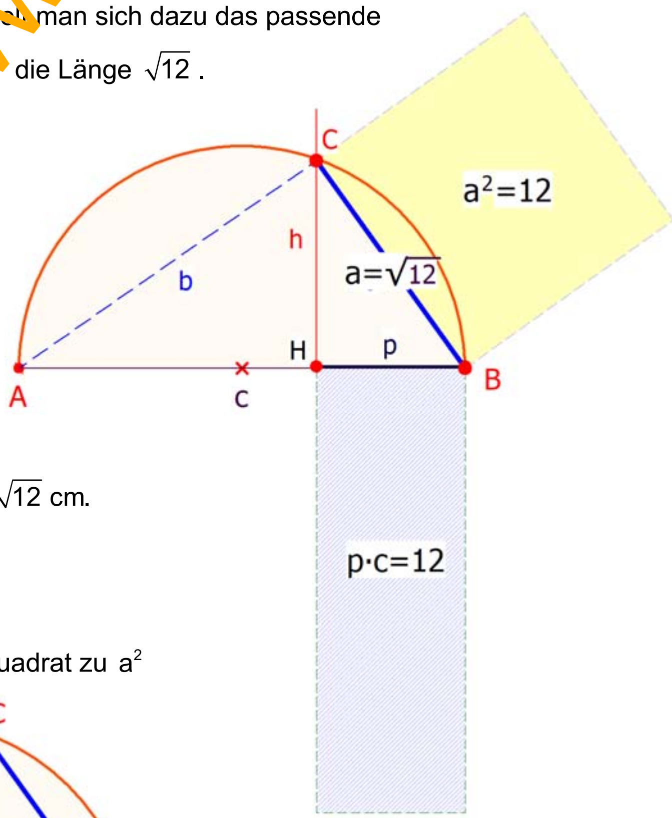
c = 6 cm und p = 2 cm. Dann hat das (gelbe) Rechteck den Inhalt $p \cdot c = 12\ cm^2$.

Dasselbe gilt dann für $a^2 = 12\ cm^2$. Also hat die Seite a die Länge $a = \sqrt{12}$ cm .

Nun können wir ganz einfach diese Aufgabe lösen: Zeichne eine Strecke der Länge $\sqrt{12}$ cm :

Man zerlegt 12 in das Produkt $12 = 2 \cdot 6 \ (= p \cdot c)$, denkt sich also das gelbe Rechtecke aus c = 6 cm und p = 2 cm gezeichnet. Dann bastelt man sich dazu das passende rechtwinklige Dreieck und hat dann mit der Seite a die Länge $\sqrt{12}$.

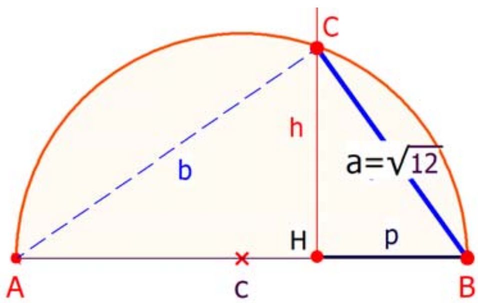
Hier die Konstruktion ausführlich:



1. Zeichne die Strecke AB = c = 6 cm.
2. Trage von B aus die Strecke p = 2 cm bis H ab.
3. Zeichne einen Halbkreis über AB.
4. Zeichne eine Senkrechte zu AB durch H.

Die Senkrechte h und der Halbkreis schneiden einander in C. Die Strecke BC hat die Länge $\sqrt{12}$ cm.

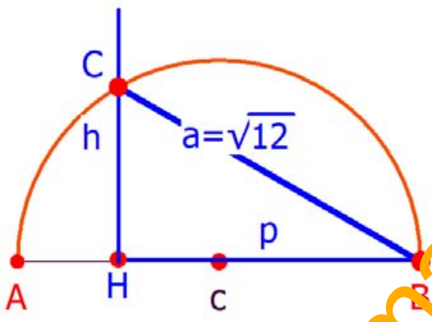
Hinweis: Man sollte das Rechteck zu $p \cdot c$ und das Quadrat zu a^2 weglassen. Sie werden nicht gebraucht und sollen nur den Zusammenhang mit dem Kathetensatz aufzeigen.



Man kann die Strecke der Länge $\sqrt{12}$ auch über die Gleichung $12 = 3 \cdot 4$ konstruieren:

1. Zeichne die Strecke AB = c = 4 cm.
2. Trage von B aus die Strecke p = 3 cm bis H ab.
3. Zeichne einen Halbkreis über AB.
4. Zeichne eine Senkrechte zu AB durch H.
5. Senkrechte und Halbkreis schneiden einander in C.

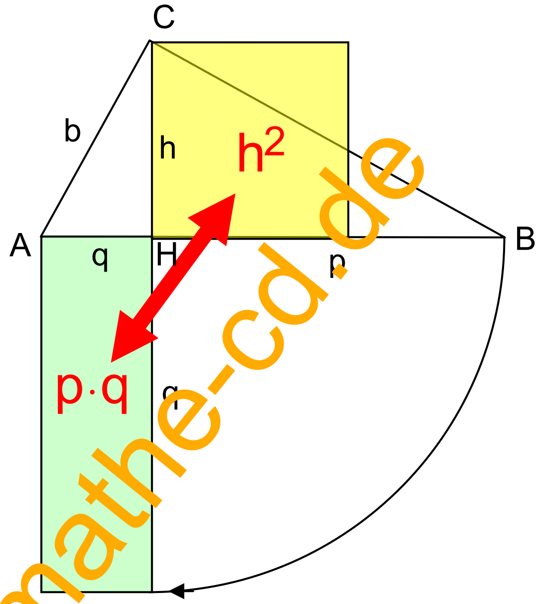
Ergebnis: $a = \sqrt{12}$ cm



Hinweis: Man kann auch mit q statt p arbeiten. Dann erhält man die Wurzelstrecke mit b.

14.3 Eine Strecke der Länge $\sqrt{c}$ zeichnen – mit dem Höhensatz

In einem rechtwinkligen Dreieck teilt die Höhe zur Hypotenuse die Hypotenuse in zwei Abschnitte q und p.



Der ***Höhensatz*** teilt uns mit, dass das

Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten

denselben Flächeninhalt hat wie das

Quadrat über der Höhe:

$$h^2 = p \cdot q$$

Anwendung zur Konstruktion einer Strecke der Länge $\sqrt{p \cdot q}$

Beispiel:

Konstruiere eine Strecke der Länge $\sqrt{18}$.

Planung:

Ich zerlege $18 = 3 \cdot 6$ und bilde eine Strecke c = AB aus den Teilstrecken q = 3 cm und p = 6 cm.
Über der Strecke c zeichne ich einen Halbkreis. In dem Punkt H, in dem p und q zusammenstoßen, zeichne ich eine Senkrechte zu c. Diese schneidet den Halbkreis in C.

Die Strecke DC ist die Höhe im Dreieck ABC. Sie hat die gesuchte Länge $\sqrt{18}$,